Sujet

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. a. Montrer que la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

b. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.